1.2 信号の時間領域および周波数領域表現

1. フーリエ変換
2. DFT（Discrete Fourier Transform）
3. Z変換

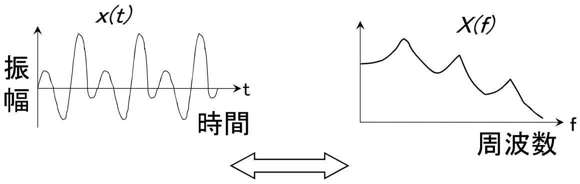
フーリエ変換

時間信号 $x(t)$ —[フーリエ変換]→ 周波数スペクトル X(f)

X(f)＝

時間信号とスペクトル

（時間信号波形）　（周波数スペクトル）



フーリエ変換

フーリエ変換結果の図示に対して

◇ フーリエ変換結果 X(f) は複素数。
◇ 各周波数成分の振幅（大きさ）は |X(f)|
（ 強度は $|X(f)|^2$ ）
◇ 各周波数成分の位相は、偏角 arg（X(f)）

フーリエ変換結果 X(f) は、
視覚的にわかりやすい $|X(f)|^2$ で図示することが多い （特にことわらない）

フーリエ変換の定義

時間信号　周波数スペクトル

$x(t)$ —[フーリエ変換]→ X(f)＝

[フーリエ逆変換]

$x(t)$＝

(p.35)

時間信号 と スペクトル との関係

◇ 時間信号 と スペクトルは、
一つの信号の表裏の関係をなす。

◇ 時間領域表現（時間信号） と
周波数領域表現（スペクトル） とのうち
場合に応じて、
見やすい（理解しやすい）領域で
信号処理理論が展開される

⇒ 時間信号とスペクトルの関係把握は重要

ディジタル領域の周波数変換

- DFT（離散フーリエ変換）
- FFT（高速フーリエ変換）
- z変換

(p.37)

DFTの定義式

$$X(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \exp(-j2\pi k \cdot p/N)$$

k（時間）　= 0, 1, 2, ...N−1　（N個）

p（周波数）= 0, 1, 2, ...N−1　（N個）

逆変換（I DFT,　I : Inverse）

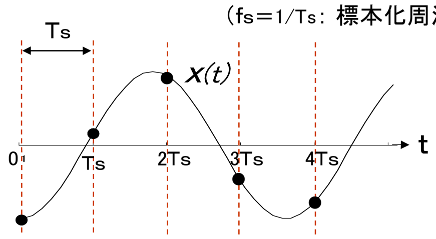
$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(p) \cdot \exp(\, j2\pi k \cdot p/N)$$

復習：標本化（サンプリング）

一定の周期 Ts で アナログ信号*x(t)* の値を求めること

Ts：標本化周期

（fs＝1/Ts：標本化周波数）



フーリエ変換との関係

◇ フーリエ変換

$$X(f) = \int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

◇ 離散信号のフーリエ変換

（ x(t) が離散時間　t=k/fs（＝k·Ts), k:整数でしか値を持たないので）

X (f)=

◇ DFT

有限区間 N、 f/fs → p/N

DFT と FFT

DFT：Discrete Fourier Transform

（離散フーリエ変換）

有限長の離散信号に対するフーリエ変換で、有限個の離散スペクトルを得る

FFT：Fast Fourier Transform

（高速フーリエ変換）

DFTを早く（少ない計算量で）計算する方法

計算の結果は、

DFT ＝ FFT

z 変換の例

ディジタル信号 ＝ 数列

$$x(k) = \{x(-2),\ x(-1),\ x(0),\ x(1),\ x(2),\ x(3)\}$$

$$\underbrace{\times z^{2}\quad \times z^{1}\quad \times z^{0}\quad \times z^{-1}\quad \times z^{-2}\quad \times z^{-3}}_{\Sigma}$$

z

z^{-k} を乗じて総和をとる

$$X(z) = x(-2)\,z^{2} + x(-1)\,z^{1} + x(0) + x(1)\,z^{-1} + x(2)\,z^{-2} + x(3)\,z^{-3}$$

$$= \Sigma\, x(k)\ z^{-k}$$

z 変換 ＝ z の多項式

フーリエ変換との関係

◇ フーリエ変換

$$X(f) = \int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

◇ 離散信号のフーリエ変換

(x(t) が離散時間 t = k/fs (= k･Ts), k:整数でしか値を持たないので)

$$X(f) = \sum_k x(k/fs)\, e^{-j2\pi k f/fs}$$

ここで、$\left\{ \begin{array}{l} e^{j2\pi f/fs} = z \\ x(k/fs) \Rightarrow x(k) \end{array} \right\}$ と置く

z 変換 ⇩

$$X(z) = \sum_k x(k)\, z^{-k}$$

z 変換の定義式

z 変換

時間 → 周波数

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k}$$

x(k):離散信号　z: 周波数を表す複素変数

X(z):「 信号 x(k) の z 変換 」と呼ばれる。

逆 z 変換

周波数 → 時間

$$x(k) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z)\, z^{k-1} dz$$

z 変換の意義

◇ アナログの ラプラス変換に相当
（フーリエ変換の周波数 f を複素数へ拡張）

（ ◇ ディジタル信号（＝数列）が多項式として解析的に扱えるようになる ）

◇ 離散系の伝達関数が得られ、系の特性が把握できる （後述）

◇ 実際的な周波数分析より、フィルタ設計やシステム解析などの理論面で有用

z 変換の重要な定理

$$x(k) \overset{Z}{\Longleftrightarrow} X(z)$$

$$x(k-1) \overset{Z}{\Longleftrightarrow} z^{-1}X(z)$$ ← 信号の遅れ

（証明） $X(z) = \sum_k x(k) \cdot z^{-k}$

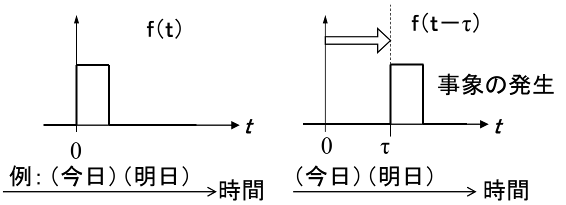
より、x(k−1) の z 変換は、

$$\sum_k x(k-1) \cdot z^{-k} = \sum_m x(m) \cdot z^{-m}\, z^{-1}$$

$$= z^{-1} \cdot X(z)$$

k−1 = m
k = m+1

豆知識: 遅れた信号の一般的表現



◇ 信号 f(t−τ) は、t =τ の時 に 値 f(0)、すなわち、 信号 f(t) が t =0 の時の値、をとる。

◇したがって、信号 f(t−τ) は、f(t) を右側に「τ」移動した（＝遅れた）ものである。

（例:f(t) では今日発生したことが f(t−τ)では明日発生）

時間領域と周波数領域（まとめ）

Z変換: ディジタル信号（無限長も含む）を
複素周波数領域に変換
→ 理論解析に利用。

DFT（FFT）: 有限長のディジタル信号を
実周波数領域に変換
→ 実際の信号の周波数分析、
信号処理、表示に利用。

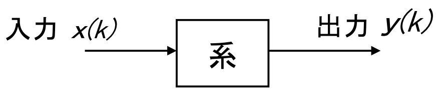
3. 線形系（線形システム）

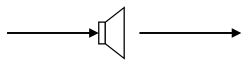
① 線形系の概要

② インパルス応答

③ たたみ込み

系（システム）とは？

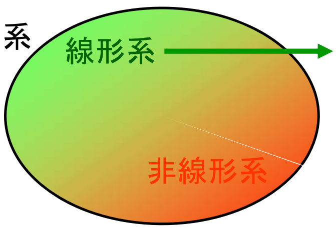




例）スピーカ

室内音響系、マイクロホン、通信系
自動車、人間、etc

線形系



なぜ重要か？

① 身近に多く存在

② 扱いやすい

・数式表現（モデル化）が簡単

・制御しやすい

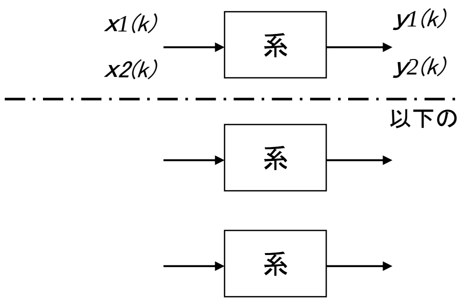
［代表例］

受動電気回路

室内音響系

線形な系とは？

線形系の定義

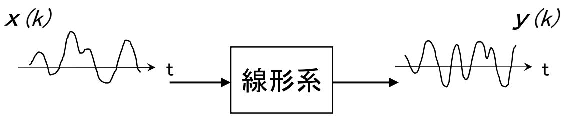


の時、
以下の2つが成立

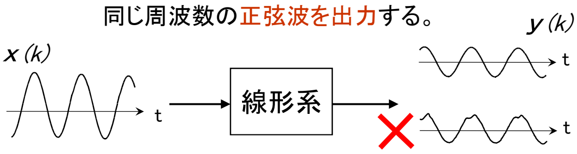
(p.48)

線形系の重要な性質

一般の（広帯域）信号を入力した時には、
波形が大きく変化する系であっても、



正弦波を入力した時には、
同じ周波数の正弦波を出力する。



正弦波入力に対する線形系の出力

線形系に正弦波信号を入力すると、
波形は変わらない。
同じ周波数で、
振幅と位相のみが変化した
正弦波を出力する。

注）cos波も正弦波に含める（以下同様）

正弦波は線形系の固有関数

$Ax=\lambda x$

行列
（線形変換）

線形系

正弦波 ⇨ 振幅と位相の変化量

正弦波

正弦波は、微分・積分の固有関数
だから、正弦波の微分・積分は、

$$\frac{d}{dt}\sin\omega t =$$

$$\int \sin\omega t \, dt =$$

正弦波の変化が重要な理由 (1)

◇ フーリエ変換
全ての信号 x (k) は、正弦波 $e^{j\omega k}$
の荷重和として表される。

$$x(k)=\sum_{\omega} X(\omega)\cdot e^{j\omega k} \qquad (1)$$

◇ 一方、正弦波 $e^{j\omega k}$ は線形系によってG(ω)倍
されるとする。

正弦波 $e^{j\omega k}$ → 線形系 G → 正弦波は、G(ω)倍 $G(\omega)\cdot e^{j\omega k}$

正弦波の変化が重要な理由 (2)

$$x(k)=\sum_{\omega} X(\omega)\cdot e^{j\omega k}$$

入力 x(k) に含まれる個々の正弦波が、G(ω)倍
されるので、出力 y(k) は、

$$y(k)=\sum_{\omega} G(\omega)\cdot X(\omega)\cdot e^{j\omega k}$$

と、求められる。

入力 x(k) → 線形系 G → 出力 y(k)

正弦波の変化が重要な理由 (3)

すなわち、個々の正弦波 $e^{j\omega k}$ に対する
出力 G(ω) $e^{j\omega k}$ がわかれば、
すべての入力信号に対する出力がわかる。

正弦波 $e^{j\omega k}$ → 線形系 G → 正弦波は、G(ω)倍 $G(\omega)\cdot e^{j\omega k}$

◇ G(ω) を系の周波数特性と呼ぶ
◇ G(ω) は複素数であり、正弦波 $e^{j\omega k}$ の、
振幅・位相変化を表す

伝達関数

x(k) X(z) → 線形系 インパルス応答 g(k) 伝達関数 G(z) → y(k) Y(z)

伝達関数
（定義）

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

入力と出力の
z 変換の比

周波数領域の
入出力関係

$$Y(z) = G(z)\cdot X(z)$$

入力にG(z) 倍したのが出力

線形系と正弦波（まとめ）

◇ 正弦波を入力したら正弦波が出力されるのは、正弦波が線形系（線形変換）の固有関数だからである。
（参考） 微分、積分も線形変換です

◇ その固有値は、周波数特性（伝達関数）である。

◇ ある線形変形に対する固有値が得られれば、全ての関数に対する変形が予想できる。

◇ 正弦波や、周波数特性の重要性は、以上の理由による

非線形系

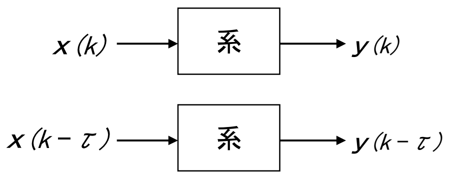
・線形系の性質が満足されない系。

・厳密には、多くの系が非線形系。
非線形の程度が小さい系
（または、入力の範囲など）を
線形系とみなして信号処理を行う。

・非線形の程度が大きいと信号処理の効率が低下するので、注意が必要である。

時不変系とは？

時間が経っても特性が変化しない系



時間 τ の後に、同じ入力を入れれば、
同じ出力が出てくる系

時不変という性質の必要性

時変だと困ること
・計測：今測った特性が、もう変化している
・制御：推定した特性に基づいた制御ができない

時不変性 ＝（系や信号の）定常性 とも言う

ただし、短時間の間に大きく変化しなければ、
ある程度の時変性や非定常性には
対応できる信号処理もある。
→ 適応信号処理など

線形系の概要 （まとめ）

とくに断らない限り、
時不変 な 線形系は、
信号処理の大前提

◇ 正弦波は、線形系の固有関数